

Egy szélsőérték - számításról

Előző írásunkban – ld.: *) ! – említettünk egy szélsőérték - számítást, amit most analitikusan el is végzünk.

A mondott függvény:

$$\phi(\varphi) = \varphi - \arctg \left[\frac{r(\varphi) \cdot \sin \varphi}{e + r(\varphi) \cdot \cos \varphi} \right], \quad r(\varphi) = \frac{b^2}{a + e \cdot \cos \varphi} \quad (1)$$

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele:

$$\frac{d}{d\varphi} \phi(\varphi) = 0 \quad (2)$$

(1) - et (2) szerint:

$$\frac{d}{d\varphi} \phi(\varphi) = 1 - \frac{1}{1 + \left[\frac{r \cdot \sin \varphi}{e + r \cdot \cos \varphi} \right]^2} \cdot \frac{(r' \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi) \cdot (e + r \cdot \cos \varphi) - r \cdot \sin \varphi \cdot (r' \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi)}{(e + r \cdot \cos \varphi)^2} = 0.$$

Rendezve:

$$\frac{1}{1 + \left[\frac{r \cdot \sin \varphi}{e + r \cdot \cos \varphi} \right]^2} \cdot \frac{(r' \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi) \cdot (e + r \cdot \cos \varphi) - r \cdot \sin \varphi \cdot (r' \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi)}{(e + r \cdot \cos \varphi)^2} = 1. \quad (3)$$

Átalakításokkal:

$$\begin{aligned} \frac{e \cdot r' \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot (e + r \cdot \cos \varphi) - r \cdot r' \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \varphi}{(e + r \cdot \cos \varphi)^2 + (r \cdot \sin \varphi)^2} &= 1, \\ \frac{e \cdot r' \cdot \sin \varphi + r \cdot r' \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + e \cdot r \cdot \cos \varphi + r^2 \cdot \cos^2 \varphi - r \cdot r' \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \varphi}{(e + r \cdot \cos \varphi)^2 + (r \cdot \sin \varphi)^2} &= 1, \\ \frac{e \cdot r' \cdot \sin \varphi + e \cdot r \cdot \cos \varphi + r^2 \cdot (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{(e + r \cdot \cos \varphi)^2 + (r \cdot \sin \varphi)^2} &= 1, \\ \frac{e \cdot (r' \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi) + r^2}{(e + r \cdot \cos \varphi)^2 + (r \cdot \sin \varphi)^2} &= 1, \\ \frac{e \cdot (r' \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi) + r^2}{(e + r \cdot \cos \varphi)^2 + (r \cdot \sin \varphi)^2} &= 1, \\ e \cdot (r' \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi) + r^2 &= (e + r \cdot \cos \varphi)^2 + (r \cdot \sin \varphi)^2, \\ e \cdot (r' \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi) + r^2 &= e^2 + 2 \cdot e \cdot r \cdot \cos \varphi + r^2 \cdot \cos^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \varphi, \\ e \cdot (r' \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi) + r^2 &= e^2 + 2 \cdot e \cdot r \cdot \cos \varphi + r^2, \\ e \cdot r' \cdot \sin \varphi + e \cdot r \cdot \cos \varphi &= e^2 + 2 \cdot e \cdot r \cdot \cos \varphi, \\ e \cdot r' \cdot \sin \varphi &= e^2 + e \cdot r \cdot \cos \varphi, \\ r' \cdot \sin \varphi &= e + r \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Most (1 / 2) - gyel is:

$$\begin{aligned}
r' &= \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{b^2}{a + e \cdot \cos \varphi} \right) = b^2 \cdot \frac{d}{d\varphi} \cdot (a + e \cdot \cos \varphi)^{-1} = \\
&= b^2 \cdot (-1) \cdot (a + e \cdot \cos \varphi)^{-2} \cdot (-e \cdot \sin \varphi) = b^2 \cdot \frac{e \cdot \sin \varphi}{(a + e \cdot \cos \varphi)^2}, \text{ tehát:} \\
r' &= b^2 \cdot \frac{e \cdot \sin \varphi}{(a + e \cdot \cos \varphi)^2}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Most (1 / 2), (4) és (5) - tel:

$$\begin{aligned}
b^2 \cdot \frac{e \cdot \sin \varphi}{(a + e \cdot \cos \varphi)^2} \cdot \sin \varphi &= e + \frac{b^2}{a + e \cdot \cos \varphi} \cdot \cos \varphi, \\
b^2 \cdot e \cdot \sin^2 \varphi &= e \cdot (a + e \cdot \cos \varphi)^2 + b^2 \cdot \cos \varphi \cdot (a + e \cdot \cos \varphi), \\
b^2 \cdot e \cdot \sin^2 \varphi &= e \cdot (a^2 + 2 \cdot a \cdot e \cdot \cos \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi) + b^2 \cdot (a \cdot \cos \varphi + e \cdot \cos^2 \varphi), \\
b^2 \cdot e \cdot \sin^2 \varphi &= e \cdot a^2 + \cos \varphi \cdot (2 \cdot a \cdot e^2 + a \cdot b^2) + \cos^2 \varphi \cdot (e^3 + b^2 \cdot e), \\
\sin^2 \varphi &= \frac{e \cdot a^2}{b^2 \cdot e} + \frac{2 \cdot a \cdot e^2 + a \cdot b^2}{b^2 \cdot e} \cdot \cos \varphi + \frac{e^3 + b^2 \cdot e}{b^2 \cdot e} \cdot \cos^2 \varphi, \\
\sin^2 \varphi &= \frac{a^2}{b^2} + \left(2 \cdot \frac{a \cdot e}{b^2} + \frac{a}{e} \right) \cdot \cos \varphi + \left(\frac{e^2}{b^2} + 1 \right) \cdot \cos^2 \varphi, \\
1 - \cos^2 \varphi &= \frac{a^2}{b^2} + \left(2 \cdot \frac{a \cdot e}{b^2} + \frac{a}{e} \right) \cdot \cos \varphi + \left(\frac{e^2}{b^2} + 1 \right) \cdot \cos^2 \varphi, \\
\left(\frac{e^2}{b^2} + 2 \right) \cdot \cos^2 \varphi &+ \left(2 \cdot \frac{a \cdot e}{b^2} + \frac{a}{e} \right) \cdot \cos \varphi + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) = 0, \\
(2 \cdot b^2 + e^2) \cdot \cos^2 \varphi &+ \left(2 \cdot a \cdot e + \frac{a}{e} \cdot b^2 \right) \cdot \cos \varphi + (a^2 - b^2) = 0. \tag{6}
\end{aligned}$$

Most érvényesítve, hogy a *lineáris excentricitás*ra:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}, \tag{7}$$

kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
(2 \cdot b^2 + a^2 - b^2) \cdot \cos^2 \varphi &+ \left(2 \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot b^2 \right) \cdot \cos \varphi + (a^2 - b^2) = 0, \\
(a^2 + b^2) \cdot \cos^2 \varphi &+ \left(2 \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot b^2 \right) \cdot \cos \varphi + (a^2 - b^2) = 0, \\
(a^2 + b^2) \cdot \cos^2 \varphi &+ \frac{2 \cdot a \cdot (a^2 - b^2) + a \cdot b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \cos \varphi + (a^2 - b^2) = 0, \\
(a^2 + b^2) \cdot \cos^2 \varphi &+ \frac{2 \cdot a \cdot a^2 - 2 \cdot a \cdot b^2 + a \cdot b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \cos \varphi + (a^2 - b^2) = 0, \\
(a^2 + b^2) \cdot \cos^2 \varphi &+ \frac{2 \cdot a \cdot a^2 - a \cdot b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \cos \varphi + (a^2 - b^2) = 0, \\
(a^2 + b^2) \cdot \cos^2 \varphi &+ \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot (2 \cdot a^2 - b^2) \cdot \cos \varphi + (a^2 - b^2) = 0, \\
\cos^2 \varphi &+ \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{2 \cdot a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \cos \varphi + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = 0. \tag{8}
\end{aligned}$$

A kapott másodfokú egyenlet megoldása a megoldóképlettel:

$$\begin{aligned}
 (\cos \varphi)_{1,2} &= \frac{-\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{2 \cdot a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}}{2 \cdot 1}, \\
 (\cos \varphi)_{1,2} &= \frac{-\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{2 \cdot a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}}{2}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

A numerikus részletszámítások szerint a négyzetgyök előtti $\pm$ előjelből csak a + marad meg, mert a $\cos$ - függvény nem lehet kisebb, mint (-1) . Így:

$$\cos \varphi_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{2 \cdot a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} \right). \quad (10)$$

Innen:

$$\varphi_{0,12} = \pm \arccos \left[\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{2 \cdot a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} \right) \right]. \quad (11)$$

A (11) kifejezés a szélsőérték helye(i)t adja meg. A szélsőérték nagysága(i) (1) - gyel is:

$$\phi(\varphi_{0,12}) = \varphi_{0,12} - \arctg \left[\frac{r(\varphi_{0,12}) \cdot \sin \varphi_{0,12}}{e + r(\varphi_{0,12}) \cdot \cos \varphi_{0,12}} \right], \quad r(\varphi_{0,12}) = \frac{b^2}{a + e \cdot \cos \varphi_{0,12}}. \quad (12)$$

Ezzel feladatunkat megoldottuk.

A menet közben felhasznált összefüggésekre nézve ld. pl.: [1]!

Ajánlott olvasmány:

*) – [Egy latoszog - feladat ellipszisre.pdf \(galgoczi.net\)](http://galgoczi.net/Egy_latoszog_feladat_ellipszisre.pdf)

Forrás:

[1] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev:** Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2024. 05. 01.

Továbbiak: www.galgoczi.net